

# Note sur la mathématique du vote

Avec le changement du 3 août, la Mauritanie est entrée dans une phase cruciale de son développement. Etant donné que ce mouvement s'affirme résolument comme une volonté de redressement profond fait de démocratie et de justice, j'ai jugé utile, en guise de participation personnelle à cette revue générale, d'analyser le vote tel qu'il est pratiqué chez nous d'un point de vue strictement mathématique, en exclusion de toute considération morale ou politique.

Il y a quelques années, lors de la mise en place du processus démocratique, j'ai écrit un article de presse dans lequel j'ai exprimé les principales idées que je m'en vais développer ci-après. Mais malgré l'invite que j'avais formulée à l'égard des intellectuels du pays pour leur demander de se pencher sur les divers aspects soulevés, je n'ai alors enregistré aucun écho, en dehors des quelques félicitations d'usage dans mon proche entourage.

Aujourd'hui, avec la création d'une commission chargée du processus démocratique, et de la polarisation de l'opinion nationale par la phase transitoire, il est à espérer qu'il en sera autrement.

La finalité de la démocratie est, qu'après chaque vote, il y ait davantage de satisfaits que d'insatisfaits. Les premiers seront dirigés, le temps d'une législature, par les hommes qu'ils ont choisis, et se paviseront ainsi sous le beau soleil de la démocratie. Les autres, eux, attendront leur tour à l'ombre bienveillante de celle-ci.

Cependant, pour les mathématiciens, les choses ne se présentent pas dans la réalité aussi simplement que cela, car les votes tel qu'ils sont pratiqués aujourd'hui, ne garantissent pas une majorité de satisfaits.

L'éminent mathématicien et logicien du Royaume Uni, Dodgson, alias Lewis Carroll, auteur d'Alice aux pays des merveilles, dit à ce propos que "les principes du vote font d'une élection davantage un jeu stratégique qu'un test véritable des souhaits des électeurs". Et d'espérer plus loin que le scrutin reflète "le vœu de la majorité plutôt que celui des joueurs les plus habiles".

Pourtant la conception même du vote se fonde sur des principes dont l'application doit toujours dégager une majorité de votes, établie à partir de vœux librement exprimés. Ces principes sont:

1°/dans un vote, les électeurs expriment toujours leurs préférences réelles sans arrière-pensées et sans calculs;

2°/l'issue du scrutin traduit avec fidélité ces préférences individuelles en préférences collectives harmonieuses qui sont celle de la majorité.

Par contre, une autre conception qui se veut moins naïve, considère que les électeurs, êtres rationnels et pensants, prendront en ligne de compte ce qu'ils connaissent de l'opinion; ils se laisseront influencer par ce qu'ils croient être la tendance majoritaire, sans s'en tenir platoniquement à leurs choix intimes.

Mais ceci demeure fondamentale-

ment subjectif et mon but, comme je l'ai dit plus haut, n'est pas de comparer ici ces deux conceptions sur le plan de la conscience ou de la morale, de la politique ou de la philosophie; il se trouve que ce problème, qui est celui de la décision collective, s'analyse en termes mathématiques et c'est ce qui m'intéresse.

Des penseurs éminents ont consacré des études à cette question. Déjà, en 1785, Condorcet, "le dernier des philosophes" comme l'appelaient Michelet, publia "l'essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix" (pluralité ici veut dire majorité, anglicisme largement utilisé au XVIII<sup>e</sup> siècle). D'ailleurs, dans un article publié par l'Encyclopédie Universalis en 2004, Bernard Valade concédait à Condorcet le titre de précurseur de la science sociale mathématique. Mais en réalité, c'est seulement vers le milieu du XX<sup>e</sup> siècle que Guilbaud, autre mathématicien français, démontra toute la portée de ces travaux en les prolongeant dans des études récentes. Voyons de quoi il s'agit.

Dans un vote, deux alternatives peuvent se présenter:

PREMIER CAS: dans l'élection envisagée, il n'y a que deux opinions possibles; c'est par exemple le cas dans un referendum à une question à laquelle il faut répondre par oui ou par non. Dans une telle situation, choisir l'opinion A veut automatiquement dire qu'on la préfère à l'opinion B et vice-versa. Il n'y a donc aucune ambiguïté et le décompte des voix va dégager une majorité pour faire coïncider le maximum de satisfaits avec le minimum d'insatisfaits. Ceci donc est correct, et personne ne peut protester.

DEUXIEME CAS: il y a trois candidats ou plus; là, les choses peuvent se compliquer. En effet, en présence de deux opinions seulement, le choix de A veut dire automatiquement le refus de B; mais dans le cas de trois opinions A, B et C, le choix de A ne renseigne pas sur la position de l'électeur entre B et C; lequel d'entre eux craint-il le plus? Lequel d'entre eux préfère-t-il à l'autre? Du coup un problème qui n'existait pas dans le cas de deux opinions apparaît dès qu'il y en a trois et demeure évidemment présent pour un plus grand nombre. Et comme dans ces cas, il y a plus d'une façon d'être insatisfait, la règle de la majorité se trouve profondément modifiée.

Ce propos aurait été certainement considéré polémique si, pour illustrer sa thèse, Condorcet n'avait imaginé de demander aux électeurs d'indiquer non pas leur candidat préféré, mais leur ordre de préférence pour les trois candidats A, B et C. Aussi le bulletin de vote ne comportera pas un jugement tel que "A", "B" ou "C", mais plutôt du genre "A>B>C" (> pour préféré à) qui voudra dire que le votant préfère A à la fois à B et C, mais préfère B à C.

Dans le cas de trois candidats, il y a 6 ordres de préférences possibles qui sont:

A>B>C; A>C>B; C>A>B;  
C>B>A; B>A>C; B>C>A.

Pour démontrer les limites de la méthode à deux tours, on peut considérer un collège électoral composé de 60 électeurs (dans le cas de la Mauritanie, cela peut être logiquement les 60 conseillers municipaux d'une moughataa donnée), mandés pour élire un candidat parmi trois postulants.

Dans le cas d'une élection normale à deux tours, celle que nous connaissons chez nous, où il est demandé aux électeurs de choisir un seul nom, le vote donne les résultats suivants:

23 pour A; 19 pour B; 18 pour C.

C'est donc C qui est ainsi éliminé au premier tour. Le deuxième tour entre A et B donne 25 à A et 35 à B; l'avantage est donc à B. Il s'agit du scénario classique d'une élection à deux tours.

Mais dans le cas d'une élection spéciale, où il est demandé aux mêmes électeurs d'exprimer un ordre de préférence pour les trois candidats, le résultat précédent se décompose de la manière suivante:

23 pour l'ordre A>C>B;

19 pour l'ordre B>C>A;

16 pour l'ordre C>B>A;

2 pour l'ordre C>A>B.

On peut constater que ces chiffres expriment exactement le même résultat que précédemment, traduits sous une autre forme.

Essayons maintenant de dégager, à partir de ces chiffres, ce qu'il est convenu d'appeler l'ordre de préférences majoritaire. Pour cela, comparons les performances des candidats deux à deux:

- entre A et B: 23 + 2 soit 25

ont préféré A à B mais 19 + 16 soit

35 ont préféré B à A

Résultat 1: B>A

- entre A et C: 23 ont préféré A à C

mais 19 + 16 + 2 soit 37 ont pré-

fééré C à A Résultat 2: C>A - enfin

entre B et C: 19 ont préféré B à C

mais 23 + 16 + 2 soit 41

ont préféré C à B

Résultat 3: C>B

De ces comparaisons successives, nous concluons donc que B>A, C>A et C>B. Le vœu majoritaire qui se dégage ainsi de ces trois résultats est le suivant:

C>B>A.

C'est donc C, pourtant éliminé au premier tour dans une élection normale à deux tours, qui l'emporte!

Cet exemple démontre clairement que le vote, tel qu'il est pratiqué aujourd'hui, ne reflète pas toujours le vœu de la majorité dès qu'il y a plus de deux candidats.

Faut-il dans ce cas adopter la procédure du vote par ordre de préférences comme le suggère l'exemple précé-

dent? D'aucuns se précipiteraient hâtivement pour le proposer, sans se douter que des difficultés bien plus coriaces les attendent au détour.

En effet, en plus du fait que matériellement l'application de cette procédure ne sera facile ni pour les électeurs, ni pour les scrutateurs chargés de dégager l'ordre de préférences majoritaire, il y a la probabilité de tomber sur un paradoxe incontournable appelé "effet Condorcet" du nom de celui qui l'a mis en évidence. De qui s'agit-il en fait?

Admettons que la méthode qui consiste à comparer les préférences des candidats deux à deux et d'en déduire un ordre de préférences collectif rende mieux compte des nuances de l'opinion populaire. Mais le problème est qu'il peut arriver que l'on ne puisse tout simplement pas déclarer un candidat supérieur aux autres. L'exemple suivant illustre clairement une telle situation:

Soixante électeurs doivent donner leur position sur trois candidats en précisant leur ordre de préférence. Le résultat est le suivant:

23 ont donné l'ordre A>B>C

17 ont donné l'ordre B>C>A

2 ont donné l'ordre B>A>C

10 ont donné l'ordre C>A>B

8 ont donné l'ordre C>B>A

En procédant à la comparaison des candidats deux à deux, nous obtenons ce qui suit:

- entre A et B: 23 + 10 soit 33

ont préféré A à B

et seulement 17 + 2 + 8 soit 27

ont préféré B à A

Résultat 1: A>B

- entre A et C: 17 + 10 + 8 soit 35

ont préféré C à A

et seulement 23 + 2 soit 25 ont

préfééré A à C Résultat 2: C>A

- enfin entre B et C: 23 + 17 + 2

soit 42 ont préféré B à C alors que

10 + 8 soit 18 ont préféré C à B

Résultat 3: C>B

Le problème, c'est que les trois jugements majoritaires ainsi obtenus ne permettent pas de dégager un ordre de préférences global dans la mesure où ils sont tout simplement incompatibles sur un plan logique.

En effet, là où le bât blesse, c'est que:

- B>C et C>A devraient donner logiquement B>A et non A>B

- C>A et A>B devraient eux, donner C>B et non C>A

- Enfin, B>C et A>B devraient donner A>C et non C>A.

C'est cette situation d'incohérence logique dans les résultats obtenus que l'on appelle paradoxe de vote ou effet Condorcet. On peut, par analogie, considérer qu'une telle situation est pour la logique mathématique ce que la cacophonie est pour l'harmonie musicale. Un orchestre, quelques complexes et diversifiés soient ses instruments,

doit présenter une musique agréable, où toutes les notes s'imbriquent dans un ensemble cohérent. Il est normal d'exiger la même cohérence des opinions individuelles exprimées sous forme d'ordre de préférences pour pouvoir constituer une opinion collective. Le paradoxe advient quand la logique vient à s'absenter.

Il reste à préciser que la probabilité de tomber dans un cas d'effet Condorcet reste relativement faible: de 5,6% pour 3 électeurs et 3 candidats à 9%, limite vers laquelle tend cette probabilité. Mais ce paradoxe demeure à ce jour un véritable casse-tête pour les initiés, dans la mesure où il est logiquement incontournable; constatons cependant qu'il disparaît si on avait affaire à des notes que les lecteurs attribueraient aux candidats, au lieu de chercher à combiner des ordres de préférences tel que dans la méthode précédente. Tout comme ce qui se passe dans une classe d'école ou dans un meeting d'athlétisme, chaque électeur attribuera une note à chacun des candidats. Les moyennes seront alors calculées et l'emportera celui qui réussira la meilleure performance. Mais le problème n'est pas pour autant résolu, car cette méthode de la notation ne permet pas toujours d'avoir le plus grand nombre de satisfaits et peut même dégager une majorité d'insatisfaits.

Revenons par exemple à nos soixante électeurs et demandons leur de nous départager deux candidats A et B en attribuant à chacun d'eux une note allant de 1 à 5. Le résultat obtenu est le suivant:

o 40 électeurs attribuent chacun 2 points à A et 3 à B

o 20 électeurs attribuent chacun 5 points à A et 2 à B

Le candidat A réunit donc (2 X 40) + (5 X 20) soit 180 points; sa moyenne est de 3.

Le candidat B réunit, lui, (3 X 40) + (2 X 20) soit 160 points; sa moyenne est de 2,67.

C'est donc A qui l'emporte bien que visiblement, 40 électeurs lui préfèrent B.

Cette corbeille de données brutes nous a permis de constater, peut-être avec étonnement pour ceux qui le découvrent pour la première fois, qu'il n'existe pas de procédure de vote tout à fait infallible dès qu'il y a plus de 3 candidats en compétition. Aussi, continuons-nous à voter comme le font des milliers d'hommes sur cette terre; les chemins battus sont les valeurs les plus sûres et nous n'éprouvons aucune approbation à les emprunter. Mais il est important pour nous de bien comprendre tous les rouages de ce système, ses performances autant que ses limites, et surtout de pouvoir justifier son choix. J'espère que la présente note contribuera à asséoir une telle compréhension.

FAIT A NOUAKCHOTT, LE 3 OCTOBRE

2005

MOHAMED ABDALLAH OULD EL

HOUSSEINCHIMISTE A L'OMRG